Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

Isenmann - Pecatte

Théorème Soit $u_0 \in L^2([0,2\pi])$ de coefficients de Fourier $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Il existe alors une unique fonction $u :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :
(i) $\forall t>0$, $u(t,\cdot)$ 2π-périodique
(ii) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ bien définies et continues
(iii) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
(iv) $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} u_0$ dans L^2
On obtient alors : $u \in C^\infty$.

On procède par analyse - synthèse.

1) Analyse

Supposons qu'une telle fonction u existe.
La fonction $u(t,\cdot)$ est de classe C^1 et 2π-périodique, alors d'après le $\boxed{\text{théorème de Dirichlet}}$, la donnée des coefficients de Fourier de $u(t,\cdot)$ permet de retrouver la fonction u. On cherche alors à déterminer les coefficients.
La fonction $u(t,\cdot)$ est 2π-périodique continue sur $[0,2\pi]$, elle admet donc bien des coefficients de Fourier :
$$c_n(t) := c_n(u(t,\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} u(t,x)\,dx$$
Effectuons une dérivation sous le signe intégral : On considère I segment de $\mathbb{R}_+^*$. — le fait de se restreindre à un segment i.e. un compact assure que $\|\partial_t u\|_\infty$ soit constant donc intégrable
- $\forall x \in [0,2\pi]$, $u(\cdot,x)$ est de classe C^1 sur I
- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t,\cdot)$ continue sur $[0,2\pi]$
- $\forall (t,x) \in I\times[0,2\pi]$, $|\partial_t u(t,x)| \leq \|\partial_t u\|_{\infty, I\times[0,2\pi]}$ intégrable

On obtient :
$$\forall t\in I,\ c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\partial_t u(t,x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\underbrace{\Delta_x u(t,x)}_{\text{par hypothèse (iii)}}\,dx$$
Vrai sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. — et on ne perd pas de généralité !!!
Donc :
$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\Delta_x u(t,x)\,dx = in\,c_n(\partial_x u(t,\cdot)) = -n^2 c_n(u(t,\cdot)) = -n^2 c_n(t)$$
Alors,
$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \exists \alpha_n \in \mathbb{C},\ c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$$ — reste à déterminer les α_n

On applique la $\boxed{\text{formule de Parseval}}$ à $u_0 - u(t,\cdot) \in L^2([0,2\pi])$. On obtient ainsi :
$$\|u_0 - u(t,\cdot)\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n e^{-n^2 t} - d_n|^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\alpha_n = d_n$. — car c'est une somme à termes positifs
Donc :
$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi],\ u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

2) Synthèse

Considérons la fonction u définie par : $u : (t,x) \in \mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi] \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$
L'application définie par : $x \mapsto e^{inx}$ est trivialement 2π-périodique donc $u(t,\cdot)$ est bien 2π-périodique. — = point (i) vérifié
Montrons le caractère C^∞ de u sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$:
- par le théorème de Parseval appliqué à $u_0 \in L^2([0,2\pi])$, $\|u_0\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|$ donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $|d_n| \leq \|u_0\|_2$
- $\forall t_0>0,\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall a,b\in\mathbb{N},\ \forall t\geq t_0$,
$$\left| d_n \frac{\partial^a e^{-n^2 t}}{\partial_t{}^a}\frac{\partial^b e^{inx}}{\partial x^b}\right| = \left|d_n e^{-n^2 t}(-n^2)^a (in)^b e^{inx}\right| \leq \|u_0\|_2\, |n|^{2a+b} e^{-n^2 t_0}$$ terme général indépendant de t et de x d'une série convergente

Donc la série de terme général converge normalement sur $[t_0,+\infty[\times\mathbb{R}$ i.e. u y est C^∞. Ainsi, u est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. — $\Rightarrow$ point (ii) vérifié
- La convergence normale précédente permet la dérivation terme à terme sous le signe somme, on a alors immédiatement que $\partial_t u = \Delta_x u$. — permet utilisation du critère de dérivabilité sous le signe intégral à répétition
- D'après le théorème de Parseval appliqué à $u(t,\cdot) - u_0 \in L^2([0,2\pi])$:
$$\|u(t,\cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n - c_n(t)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 |1 - e^{-n^2 t}|^2$$ — par construction

Or :
$$\forall n\in\mathbb{Z},\ |d_n|^2 |1-e^{-n^2 t}|^2 \leq |d_n|^2$$ qui est le terme général, indépendant de t, d'une série convergente — Parseval appliqué à u_0
$$\lim_{t\to 0} |d_n|^2 |1-e^{-n^2 t}|^2 = 0$$

Donc, par convergence dominée, $\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - u_0\|_2 = 0$. — $\Rightarrow$ point (iv) vérifié